
TD n°4 : Géométrie projective

Disponible sur <http://www.u-cergy.fr/ffillast/ens.html>

Exercice 1.

- a) Montrer que tous les plans de $P_3(\mathbb{R})$ se rencontrent en une droite.
- b) Soit x_1, \dots, x_n n points de $P_n(\mathbb{R})$. A quelle condition existe-t-il un unique hyperplan passant par ces points ? Écrire l'équation du plan de $P_3(\mathbb{R})$ passant par $x_1 = p(1, 0, -1, 2), x_2 = p(0, 1, 1, -1), x_3 = p(-1, -2, 0, 1)$.
- c) Montrer que si l_1 et l_2 sont deux droites de $P_3(\mathbb{R})$ qui ne se rencontrent pas, et que si $x \in P_3(\mathbb{R}) \setminus l_1 \cup l_2$, alors il existe une unique droite de $P_3(\mathbb{R})$ contenant x qui rencontre l_1 et l_2 . Donner l'équation de cette droite si $x = p(1, 1, 0, 0)$ et

$$l_1 : \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}, l_2 : \begin{cases} 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Exercice 2. Soit V un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Combien de points contient le plan projectif $P(V)$? Combien de droites ? Combien de points y'a-t-il sur chaque droite ? Combien de droites passent par chaque point ?

Exercice 3. On veut montrer que l'ensemble des droites d'un espace projectif de dimension 3 sont en bijection avec les points d'une hypersurface quadrique de $P_5(\mathbb{R})$ (on peut en déduire que ce n'est pas un espace projectif).

a) Soit

$$\alpha : G(2, 4) = \{V \leq \mathbb{R}^4 \mid \dim(V) = 2\} \rightarrow P_5(\mathbb{R}), \langle v, w \rangle \mapsto p(a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{12}, a_{13}, a_{23})$$

avec

$$a_{ij} = x_i y_j - x_j y_i, v = (x_0, x_1, x_2, x_3), w = (y_0, y_1, y_2, y_3).$$

Montrer que α est bien définie. (L'image par α sont les *coordonnées pluckeriennes* de la droite $P(\langle u, v \rangle)$.)

b) Si on note $(x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{12}, x_{13}, x_{23})$ les coordonnées de \mathbb{R}^6 , on appelle *quadrique de Klein* l'hypersurface de $P_5(\mathbb{R})$ d'équation

$$x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12} = 0.$$

Montrer que l'image de α coïncide avec cette hypersurface et que α est injective.

Exercice 4.

- a) On trace une ligne d'horizon sur une feuille. On veut dessiner une voie de chemin de fer qui va à l'horizon. Quelles sont les conditions pour faire un dessin correct ?
- b) En combien de parties est divisé $P_2(\mathbb{R})$ par une droite ? Deux droites ? Trois droites qui ne passent pas par le même point ?

Exercice 5. Soit $P(E)$ un plan projectif. Un *faisceau de droites* de P est la famille de toutes les droites passant par un point m de P , noté m° . Montrer que m° est un espace projectif. (Montrer que m° est une droite de $P(E^*)$.)

Exercice 6.

- a) Combien de points fixes peut avoir une homographie de $P_1(\mathbb{R})$? Donner un exemple pour chaque cas.

b) Montrer que pour $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $\{g_i | i = 1 \dots 6\}$ est un sous-groupe de $\text{PGL}(2, k)$ isomorphe à S_3 , où $g_1(z) = z, g_2(z) = \frac{1}{z}, g_3(z) = 1 - z, g_4(z) = \frac{1}{1 - z}, g_5(z) = \frac{z - 1}{z}, g_6(z) = \frac{z}{z - 1}$.

c) Soit $e_1 = p(1, 0, -1), e_2 = p(0, 1, 1), e_3 = p(-1, -2, 0)$ et $f_1 = p(1, 1, 0), f_2 = p(0, 1, 0), f_3 = p(1, 1, 2)$ deux triplets de points de $P_2(\mathbb{R})$. Compléter chaque triplet pour former deux repères projectifs E et F , et écrire l'unique homographie qui envoie E sur F .

Exercice 7.

a) Soit P un plan projectif, D une droite de P et $m \in P \setminus D$. Soit $m' \subset P^*$ la droite duale de m identifiée avec le faisceau m^o . On note i l'application d'incidence :

$$i : m^o \rightarrow D, x \mapsto x \cap D.$$

Montrer que i est une homographie.

b) Soit V un hyperplan d'un espace projectif $P(E)$ et $c \in P(E) \setminus V$. On note $\pi_{c,V}$ la projection sur V de centre c :

$$\pi_{c,V} : P(E) \setminus \{c\} \rightarrow V, x \mapsto \langle c, x \rangle \cap V.$$

Montrer que $\pi_{c,V}$ est une homographie. Calculer $\pi_{c,V}(x)$ si $V \subset P_3(\mathbb{R})$ est d'équation $2x_1 - x_2 + x_4 = 0$, $c = p(1, 1, 0, 0)$ et $x = p(1, -1, -1, 1)$.

c) Soit V et W deux hyperplans d'un espace projectif $P(E)$ et $c \in E \setminus V \cup W$. On note g la perspective de centre c de V sur W :

$$g : V \rightarrow W, x \mapsto \langle c, x \rangle \cap W.$$

Montrer que g est une homographie.

d) Montrer que si E est de dimension 3, g est composée de deux incidences.

Exercice 8.

a) Dans un espace projectif $P(E)$ soit d_1, d_2, d_3, d_4 quatre droites d'un faisceau m^o et soit D une droite ne passant pas par m . On note $a_i = d_i \cap D$. Montrer que $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ ne dépend pas du choix de D .

On appelle $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ le birapport des quatre droites et on le note $[d_1, d_2, d_3, d_4]$.

b) Montrer que $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ est le birapport de quatre points d'_1, d'_2, d'_3, d'_4 sur la droite m' .

c) Dans \mathbb{R}^2 , si on note α_i l'angle entre d_i et d_{i+1} , montrer que

$$1 - [d_1, d_2, d_3, d_4]^{-1} = [d_2, d_3, d_1, d_4] = \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_3}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\alpha_2 + \alpha_3)}.$$

d) Montrer que le birapport de quatre droites dans un plan affine vaut -1 si et seulement si une parallèle à d_4 rencontre d_1, d_2, d_3 en des points a_1, a_2, a_3 tels que a_3 soit le milieu de $a_1 a_2$.

e) Soit deux droites D et D' d'un plan projectif qui se coupent en O . Soit A, B, C sur D et A', B', C' sur D' . Montrer que $\langle A, A' \rangle, \langle B, B' \rangle, \langle C, C' \rangle$ sont concourantes si et seulement si $[A, B, C, O] = [A', B', C', O]$.

Exercice 9 (Distance de Hilbert). Soit C un compact strictement convexe dans un plan projectif. Pour deux points x, y dans l'intérieur de C on note a, b les intersections de $\langle xy \rangle$ avec le bord de C . On note

$$d(x, y) = \frac{1}{2} |\ln([a, b, x, y])|.$$

a) Montrer que $d(x, y) = d(y, x)$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, et que si z est sur le segment xy alors $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$

b) Soit $z \in \overset{\circ}{C} \setminus \langle x, y \rangle$. On note u, u' (resp. v, v') l'intersection de $\langle x, z \rangle$ (resp. $\langle y, z \rangle$) et du bord de C . On note m l'intersection de $\langle u, u' \rangle$ et de $\langle v, v' \rangle$. On note z' l'intersection de $\langle xy \rangle$ et de $\langle mz \rangle$. En utilisant les droites passant par m , montrer que $d(x, z') < d(x, z)$. En déduire que d est une distance.

c) Dans \mathbb{C} on considère deux cercles de centres C_1, C_2 qui se rencontrent en I_1, I_2 avec un angle (extérieur) de mesure θ . Montrer que

$$i\theta = \frac{1}{2} \ln([C_1, C_2, I_1, I_2]),$$

où \ln est le logarithme principal dans \mathbb{C}^* .