M1-Master MFA
2010-2011
Géométrie Différentielle

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

TD n°1 : Variétés et sous-variétés

Exercice 1.

a) Soit X un espace topologique. Montrer que si X est localement connexe par arc, alors X est connexe par arc si et seulement si X est connexe.

b) En déduire qu'une variété est connexe par arc.

c) Que peut on dire de l'espace X suivant. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on considère $X = \mathbb{R} \cup \{a, b\}$ muni de la topologie dont la base est $\mathbb{R}, I_x \cup \{a\}, I_x \cup \{b\}$ avec $I_x =]-\infty, x[\cup]x, +\infty[$.

Exercice 2. Soit M une variété topologique. Vérifier que "être C^k-compatible" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas C^k de M.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}$ muni de l'atlas $A = \{(\mathbb{R}, Id)\}$. Soit $f(x) = x^3$, qui donne un second atlas $A' = \{(\mathbb{R}, f)\}$ sur $\mathbb{R}$. Vérifier que l'on a deux atlas C^∞, qu'ils ne sont pas C^k-compatibles pour tout $k > 0$ et que f est un difféomorphisme de $(\mathbb{R}, A')$ dans $(\mathbb{R}, A)$.

Exercice 4. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application C^1. On suppose qu'il existe $a \in U$ telle que la différentielle de f en a soit injective. Montrer qu'alors il existe un voisinage U' de a, un voisinage V' de $f(a)$ avec $f(U') \subset V'$, un voisinage V de $(a, 0)$ dans $\mathbb{R}^m$ et un difféomorphisme $\phi : V' \to V$ tel que

$$\phi(f(x)) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Exercice 5. On note $P^n(\mathbb{R})$ l'*espace projectif réel*. C'est par définition l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$, c'est-à-dire

$$P^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0, y = \lambda x.$$

On munit $P^n(\mathbb{R})$ de la topologie quotient. Pour $i = 1, \dots, n+1$, on pose

$$U_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in P^n(\mathbb{R}), x_i \neq 0\}.$$

Soit $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\varphi_i([x_1, \dots, x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right).$$

a) Montrer que $\{(U_i, \varphi_i), i = 1, \dots, n+1\}$ est un atlas C^∞ de $P^n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que la projection canonique de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sur $P^n(\mathbb{R})$ est une submersion C^∞.

c) En trouvant une définition équivalente de $P^n(\mathbb{R})$, montrer qu'il est compact.

d) Soit $f : P^n(\mathbb{R}) \to P^{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $f([x_1, \dots, x_{n+1}]) = [0, x_1, \dots, x_{n+1}]$. Montrer que f est un plongement.

Exercice 6.

a) Montrer que l'injection canonique d'une sous-variété X dans une variété Y est un plongement. Montrer que si une application f d'une variété X dans une variété Y est un plongement C^∞ alors $f(X)$ est une sous-variété de Y.

b) Trouver un exemple d'une immersion injective d'une variété dans $\mathbb{R}^n$ qui ne soit pas un plongement.

Exercice 7.

a) Soit X une sous-variété de Y et $x \in X$. Soit (Ω_X, φ_X) une carte de la variété X en x, telle que $\varphi_X(x) = 0$. Montrer que, quitte à restreintre (Ω_X, φ_X), il existe une carte (Ω_Y, φ_Y) de Y en x adaptée à X qui coïncide avec (Ω_X, φ_X) sur X.

b) Soit Y une sous-variété d'une variété Z et X une sous-variété de la variété Y. Vérifier que X est une sous-variété de Z.

Exercice 8.

a) Montrer que $\mathbb{S}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) Esquisser et montrer que les ensembles suivants sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{2}$$

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{3}$$

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \tag{4}$$

c) Est-ce que $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 + 4x^2y^2 - 4xyz = 0\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 9 (Examen 2007-2008)**.**

a) Soit M l'ensemble des points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient à la fois que $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ et que $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - z^2 = 0$. Montrer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?

b) Soit M l'ensemble des points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient $x^2 + y^2 = z^2$. Montrer que M n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10.

a) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ définie par $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz)$. Montrer que f est une immersion C^∞ de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^6$, puis montrer que $g := f|_{\mathbb{S}^2}$ est une immersion C^∞ de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^6$.

b) Soit $p : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to P^2(\mathbb{R})$ la projection canonique. Montrer qu'il existe une unique application $h : P^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^6$ telle que $h \circ p|_{\mathbb{S}^2} = g$. En déduire que $p|_{\mathbb{S}^2}$ est un C^∞-difféomorphisme local, que h est C^∞, et que h est une immersion.