Licence L3
2010/2011
Parcours Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

F7 : Séries de Laurent, théorème des résidus et ses applications

Exercice 1 Déterminer des couronnes maximales $r < |z-a| < R$ où les séries de Laurent suivantes convergent :

$$a) \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-|n|} z^n, \quad b) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(z-1)^n}{\cosh(n\alpha)} \ (\alpha > 0), \quad c) \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-n^4} z^{n^3}, \quad d) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{z^n}{1+n^2}.$$

Exercice 2 Donner le développement en série de Laurent des fonctions suivantes dans des couronnes maximales centrées en α :

$$a)\ z^3 \exp(1/z),\ \alpha = 0; \quad b)\ \frac{1}{z^2-(3+i)z+3i},\ \alpha \in \{0;3;i\}; \quad c)\ \frac{e^z}{z-1},\ \alpha \in \{1;i\}.$$

Exercice 3 Déterminer les singularités isolées et la nature de chaque singularité des fonctions définies par :

$$a)\ \frac{\cos z}{z}, \quad b)\ \exp(1/z), \quad c)\ \log(1+z)z^3, \quad d)\ \frac{1}{(1-e^z)^2}, \quad e)\ \frac{z^3}{\sin(\pi z)}, \quad f)\ e^{z/(z-2)}.$$

Exercice 4 Évaluer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :

$$a) \int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z, \quad b) \int_{|z|=1} \tan z\,\mathrm{d}z, \quad c) \int_{|z|=2} \frac{z+i}{\mathrm{Log}(2+i+z)}\,\mathrm{d}z.$$

Exercice 5 En utilisant un demi cercle centré en 0 de rayon R et se trouvant dans le demi plan $\mathfrak{Im}\, z \geq 0$, calculer :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le résidu de $f_n(z) = (1-e^{-z})^{-n}$ en 0 est égal à 1.

Exercice 7 Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ en intégrant e^{iz}/z sur un chemin constitué du demi-cercle supérieur centré en zéro et de rayon R et du segment $[-R, R]$ que l'on déformera à l'aide d'un petit demi-cercle autour de 0.

Exercice 8 Montrer en utilisant un secteur angulaire d'angle $2\pi/n$ que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

Exercice 9 On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f est donnée par

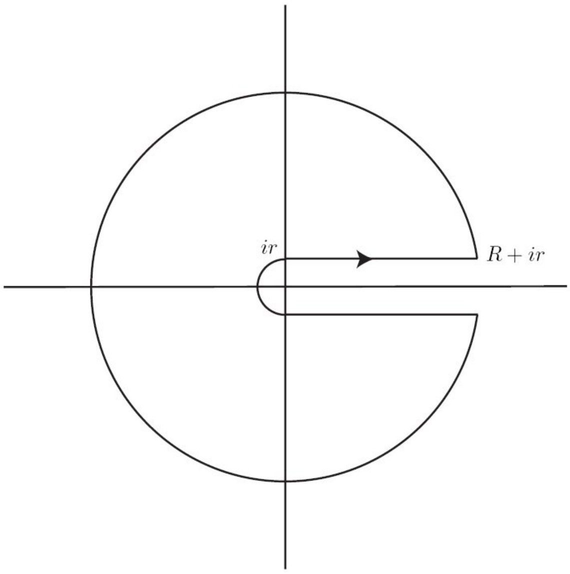
$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-ixt}\,dt$$

1. En utilisant le chemin constitué du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R avec $R > 1$, calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. (On calculera d'abord $\hat{f}(x)$ pour $x < 0$.)
2. Pour $\epsilon > 0$, et $R > 0$, on considère le chemin Γ_R constitué des segments $[-R, R]$, $[R, R+ix]$, $[R+ix, -R+ix]$, $[-R+ix, -R]$. A l'aide de Γ_R, calculer la transformée de Fourier de $f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Exercice 10 Déterminer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$$

Exercice 11 Soit Log la détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ telle que Log $z = \ln|z| + i\theta$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$.



Soit

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+1)(x^2+1)}\, dx.$$

1. Montrer que I converge.
2. En utilisant l'intégrale de

$$f(z) = \frac{(\mathrm{Log}\ z)^2}{(z+1)(z^2+1)}$$

   sur le lacet déssiné, trouver la valeur de I.

Exercice 12 Démontrer que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\cosh x}\, dx = \frac{2\pi}{\cosh(\pi/2)}$$

en utilisant le contour du rectangle de sommets $\pm R$ et $\pm R + i\pi$.